Univ. de Alcalá de Henares | **Ingeniería de Telecomunicación**
Cálculo. Segundo parcial. | **Curso 2004-2005**

Diferenciabilidad.

1. Definición de función diferenciable

Después del estudio de los límites de funciones de dos variables retomamos la discusión sobre diferenciabilidad, y aprovechamos para fijar en una definición y un teorema lo que hemos avanzado hasta ahora.

Definición 1 (Función diferenciable).
La función $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto $p = (x_0, y_0)$ si existen unos números A y B tales que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - (f(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \qquad (1)$$

En ese caso diremos que el plano $z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$ es el plano tangente *a la gráfica de f en (x_0, y_0)*

Y el teorema es este:

Teorema 2.
Para que la función f sea diferenciable en (x_0, y_0) es necesario que existan sus derivadas parciales en ese punto. Y en ese caso el plano tangente es el plano

$$z = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0)$$

Por supuesto, se puede usar directamente la definición para probar que una función es diferenciable en un punto. Para ello:

1. Debemos empezar por calcular las derivadas parciales en ese punto (ya sea mediante las reglas de derivación, o usando la definición si no es posible aplicar las reglas).
2. Después debemos demostrar que se cumple

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left(f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0)\right)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

Veamos un ejemplo elemental de demostración.

Ejemplo 3. *La función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) = (1, 2)$. En efecto, en primer lugar sus derivadas parciales existen y valen*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)} = 2, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,2)} = 8$$

Así que el único candidato posible a ser el plano tangente es

$$z = f(1,2) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)} \cdot (x-1) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,2)} \cdot (y-2) = 9 + 2(x-1) + 8(y-2)$$

y para demostrar que f es diferenciable tenemos que demostrar que se cumple

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x^2+2y^2) - (9 + 2(x-1) + 8(y-2))}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} = 0$$

Para demostrar esto, empezamos por trasladar el problema al origen mediante el cambio de variables $u = x-1, v = y-2$. De esa forma, se trata de demostrar que:

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{((u+1)^2 + 2(v+2)^2) - (9 + 2u + 8v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$$

y si se desarrollan los paréntesis se obtiene

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2+2v^2}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$$

Y ahora observamos que

$$|u^2 + 2v^2| \leq 2(u^2+v^2)$$

con lo que

$$\left|\frac{u^2+2v^2}{\sqrt{u^2+v^2}}\right| \leq \left|\frac{2(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2+v^2}}\right| = 2\sqrt{u^2+v^2}$$

A partir de aquí (o también usando coordenadas polares) se concluye fácilmente la demostración.

1.1. Una condición suficiente de diferenciabilidad

El método que acabamos de ver para demostrar que f es diferenciable es demasiado laborioso. Para que nuestro trabajo sea sencillo necesitamos una forma más sencilla de establecer que una función es diferenciable. El teorema que vamos a ver nos proporciona precisamente esa herramienta, y se basa en una propiedad de continuidad de las derivadas parciales.

Teorema 4 (Condición suficiente de diferenciabilidad).

Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables, y $p = (x_0, y_0)$ un punto en el que queremos demostrar que f es diferenciable. Si se puede encontrar una bola $B(p,r)$ tal que las dos derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

existen y son continuas en todos los puntos de la bola, entonces f es diferenciable en p.

Muchas de las funciones que utilizamos se obtienen a partir de funciones elementales haciendo operaciones sencillas. Puesto que hemos visto que es fácil demostrar la continuidad de esas funciones, se puede usar este teorema para analizar la diferenciabilidad de esas funciones. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.

1. *La función* $f(x,y)=e^{x+y}\cos(xy^2)$ *es diferenciable en todo* $\mathbb{R}^2$*. En efecto, sus derivadas parciales son las funciones:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y}\cos(xy^2) - y^2 e^{x+y}\operatorname{sen}(xy^2) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y}\cos(xy^2) - 2xye^{x+y}\operatorname{sen}(xy^2) \end{cases}$$

   y está claro que estas funciones son continuas en todo $\mathbb{R}^2$*. Así pues, sea cual sea el punto* (x_0,y_0) *que consideremos, siempre se puede encontrar una bola* $B(p,r)$ *en la que las parciales son continuas; de hecho, sirve cualquier valor de* r*, cualquier bola.*

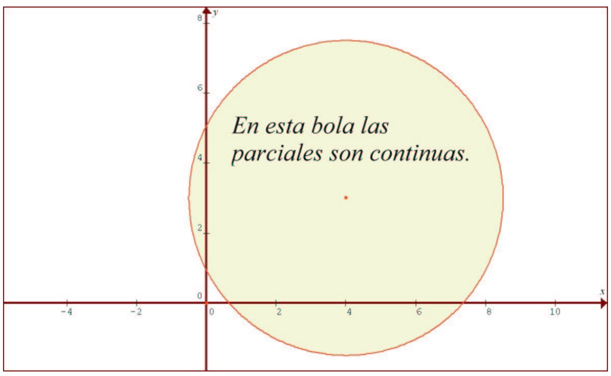
2. *Vamos a estudiar la diferenciabilidad de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   En primer lugar, aplicando las reglas de derivación se deduce que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2y\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \quad , \qquad si\ (x,y)\neq(0,0)$$

Dejamos como ejercicio para el lector la demostración de que las derivadas parciales existen pero no son continuas en el origen. Ahora, para demostrar, por ejemplo, que f *es diferenciable en el punto* $(2,1)$ *debemos encontrar una bola centrada en* $(2,1)$ *en la que las parciales sean continuas. Y no sirve cualquier bola, puesto que las parciales no son continuas en* $(0,0)$*. No obstante, sea cual sea el punto* $p=(x_0,y_0)\neq(0,0)$ *que se considere, siempre es posible construir una bola* $B(p,r)$ *que evite el origen; basta con tomar un* r *algo menor que la distancia entre* p *y el origen (ver figura). Por lo tanto, el anterior teorema nos permite demostrar que* f *es diferenciable en todo* $\mathbb{R}^2$ *salvo tal vez en el origen.*



Para analizar la diferenciabilidad en el origen se precisa más trabajo, pero aquí no nos detendremos más en este ejemplo.

1.2. Operaciones con funciones diferenciables

Al igual que sucede con la continuidad, la propiedad de ser diferenciable se conserva cuando hacemos operaciones elementales. Es decir, que se tiene este resultado:

Teorema 6.
[*Si f y g son diferenciables en el punto p entonces las funciones $f \pm g$ y $f \cdot g$ también son diferenciables en p. Si además $g(p) \neq 0$, entonces la función $\frac{f}{g}$ es diferenciable en p.*

Probablemente el lector se pregunte que sucede con la composición de funciones. Volveremos sobre este asunto más adelante, pero primero tendremos que generalizar toda la discusión al caso de funciones de n variables.

2. Probando que f no es diferenciable

¿Cómo se demuestra que una función no es diferenciable? En primer lugar, usamos que una función, para ser diferenciable, tiene que cumplir necesariamente algunas propiedades. Si comprobamos que alguna de estas propiedades falla, habremos demostrado inmediatamente que f no puede ser diferenciable. Por ejemplo:

Proposición 7 (Diferenciable implica derivable).
[*Si no existen las derivadas parciales de f en p, entonces f no es diferenciable en ese punto.*

Otro resultado con una utilidad similar es el siguiente:

Proposición 8 (Diferenciable implica continua).
[*Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), entonces es continua en ese punto.*

Leída al revés esta proposición nos interesa más: si descubrimos que f no es continua en (x_0, y_0), automáticamente sabremos que no es diferenciable en ese punto.

Esbozo de la demostración. La demostración de esta proposición es muy sencilla. Si f es diferenciable, tiene que ser

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\text{función} - (\text{plano tangente})}{\text{distancia entre } (x, y) \text{ y } (x_0, y_0)} = 0$$

y para que este límite pueda ser 0 el límite del numerador tiene que ser 0. Así que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) - (\text{plano tangente}) = 0 \tag{2}$$

El plano tangente viene definido por un polinomio de grado 1, y se obtiene fácilmente que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\text{plano tangente}) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)) = f(x_0, y_0)$$

Por lo tanto, para que el límite del numerador anterior (2) sea cero, es necesario que se cumpla:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Y eso significa precisamente que f tiene que ser continua en (x_0, y_0). $\square$.

Comentarios adicionales sobre el análisis de la diferenciabilidad. A pesar de estos resultados, sigue habiendo casos en los que no es posible decidir fácilmente lo que ocurre. Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función que resulta ser continua en $p = (x_0, y_0)$ y cuyas derivadas parciales existen en p. Pero, por otra parte, supongamos que las derivadas parciales no son continuas en p. En esta situación, ninguno de los teoremas que hemos visto sirve, ni para probar que f es diferenciable, ni para probar que no lo es. En este caso deberíamos analizar el límite de la definición:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left(f(x_0,y_0) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0) \right)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

y tratar de decidir si este límite es 0 (y entonces f es diferenciable) o si no es 0 o no existe (con lo que f no sería diferenciable).

Para evitar confusiones, queremos mencionar explícitamente que el recíproco de la condición suficiente de diferenciabilidad (teorema 4, de la página 2), no es cierto. Es decir, aunque las derivadas parciales no sean continuas en un punto p, puede suceder que la función sea diferenciable en ese punto. Veremos ejemplos de este tipo de situaciones en los ejercicios.

Y algunos comentarios adicionales más sobre derivabilidad. Al estudiar funciones de dos variables nos hemos visto obligados a distinguir entre las nociones de derivabilidad (existencia de derivadas parciales) y diferenciabilidad (el plano tangente es una buena aproximación). Queremos subrayar aquí que la derivabilidad es una noción muy débil, de la que se pueden deducir muy pocas consecuencias. La existencia de derivadas parciales depende exclusivamente del comportamiento de f en dos direcciones del plano. Y, como hemos visto, esa información puede ser muy poco representativa del comportamiento global de la función. En particular: f puede tener derivadas parciales en un punto p, sin ser ni siquiera continua en ese punto. Compárese esta afirmación con la proposición 8 de la página 4, en la que vimos que ser diferenciable implica ser continua. Veremos también ejemplos de este tipo en los ejercicios.